



**Universidad**  
Zaragoza

# Trabajo Fin de Grado

## Análisis dinámico en mercados oligopolistas con propiedad parcial

Autor/es

Enrique Cosculluela Bajén

Director/es

Joaquín Andaluz Funcia  
Gloria Jarne Jarne

Facultad de Economía y Empresa  
2020

# **Análisis dinámico en mercados oligopolistas con propiedad parcial.**

**Enrique Cosculluela Bajén**

## **Resumen**

Cada vez es más grande la cantidad de empresas que invierten en sus competidores como manera de diversificar su cartera de inversiones. A lo largo de este trabajo analizaremos las decisiones que tomarán estas empresas, en un contexto de mercado duopolista, bajo unas determinadas condiciones y la estabilidad de los equilibrios a los que llegarán. Para ello tomaremos dos modelos ampliamente conocidos en la teoría económica. Usaremos el modelo de Cournot, base en los modelos de competencia en cantidades, y el modelo de Hotelling, que es el paradigma de la competencia espacial. A través de ellos obtendremos diferentes equilibrios, tanto en un contexto estático como dinámico, cuya estabilidad podremos analizar con la ayuda de técnicas y resultados matemáticos. Este contexto dinámico será aplicado a través de varios esquemas de expectativas, que serán las expectativas Naïve, adaptativas y por último la regla del gradiente. La variedad de resultados encontrados comprende casos desde la estabilidad asintótica del equilibrio, hasta la inestabilidad o incluso la dinámica compleja. Con ello llegamos a concluir, que siempre que la velocidad de ajuste de las empresas sea suficientemente baja, podremos encontrar estabilidad en los equilibrios de Nash. Con el objetivo de ilustrar de manera más clara el comportamiento de los modelos presentaremos una colección de simulaciones, atendiendo a cada caso en el que nos encontremos en cada momento, con las que podremos comprender mejor la evolución de las variables.

Los interesantes resultados que aporta la dinámica y la aparición de la teoría microeconómica en un gran número de corrientes económicas, tanto de estudio teórico como empírico me ayudaron a elegir este trabajo como punto final a mi grado en economía. Y gracias a él poder ahondar más en la teoría microeconómica con una complejidad más alta, lo que me ha permitido conocer de una forma más extensa los mercados y el comportamiento de las empresas.

## **Abstract**

The amount of companies investing in their rivals as a way of diversifying their investment portfolio is increasing. Along this work, we will analyze the decisions made by these companies in a duopolistic market background, under some given conditions and the stability they will reach. For this task, we will use two models widely known in economic theory- the Cournot model, a basis for the models of quantity competence, and the Hotelling model, which is the paradigm for spatial competence. Using them, we will obtain different balances, both static and dynamic, whose stability will be calculated thanks to mathematical programs. This dynamic context will be applied through several expectation schemes, namely the Naïve expectations, the adaptive ones and, lastly, the gradient rule. The variety of results found includes cases from asymptotic stability of equilibrium, to instability or even complex dynamics. With this we conclude that, as long as the speed of adjustment of the companies is low enough, we can find stability in the Nash equilibriums. In order to illustrate more clearly the behavior of the models we will present a collection of simulations, attending to each case in order to be able to better understand the evolution of the variables.

The interesting results provided by both the dynamics and emergence of microeconomic theory in a large number of economic currents, both theoretical and empirical, helped me to choose this work as the final act of my degree in Economics. Thanks to it, I was able to go deeper into microeconomic theory with a higher complexity, which has allowed me to know more extensively the markets and the behaviour of companies.

# Índice

1. Introducción.....	5
1.1 Contextualización .....	5
1.2 Objetivo del trabajo.....	6
1.3 Estructura del trabajo.....	7
1.4 Asignaturas y materias relacionadas .....	7
2. Los modelos.....	8
2.1 Modelo de Cournot .....	8
2.2 Modelo de Hotelling.....	9
3. Análisis estático.....	11
3.1 El modelo de Cournot.....	11
3.2 El modelo de Hotelling .....	12
4. Análisis dinámico.....	14
4.1 Introducción de la perspectiva temporal .....	14
4.2. Expectativas, formulación y desarrollo .....	15
4.2.1 Expectativas <i>naïve</i> o de Cournot: .....	16
4.2.2 Expectativas adaptativas: .....	16
4.2.3 Regla del gradiente .....	16
4.3 Desarrollo de los modelos dinámicos: .....	18
4.3.1 Expectativas <i>Naïve</i> .....	18
4.3.1.a Modelo de Hotelling.....	18
4.3.1.b Modelo de Cournot.....	20
4.3.2 Expectativas adaptativas.....	21
4.3.2.a Modelo de Hotelling.....	21
4.3.2.b Modelo de Cournot.....	23
4.3.3 Regla del gradiente .....	24
4.3.3.a Modelo de Hotelling.....	25
4.3.3.b Modelo de Cournot:.....	30
5. Conclusiones .....	38
6. Referencias.....	40

# 1. Introducción

## 1.1 Contextualización

A lo largo de este trabajo se introduce la perspectiva temporal en un duopolio en el que se considera la existencia de propiedad parcial pasiva para analizar como este factor afecta a la estabilidad dinámica del equilibrio de Nash. Significa esto que un grupo empresarial es propietario en su totalidad de una de las empresas y de parte de otra empresa, hasta menos del 50%. Con ello vemos que una parte de la segunda empresa es propiedad de la primera, pero sin tener derecho a decisión, ya que supone menos de la mitad de la empresa. Para explicar de manera empírica a qué nos referimos con la propiedad parcial podemos poner como ejemplo que Renault adquirió un 36,8% de Nissan Motor en 1999, o Microsoft comprando el 7% de las acciones sin derecho a voto de Apple... Y en ese contexto centraremos las decisiones de producción que tomarán las empresas y analizaremos si los equilibrios de Nash obtenidos en las resoluciones de los modelos son o no asintóticamente estables en los análisis dinámicos.

Puede parecer lógica la pregunta de para qué invertir en un competidor, eso lo responden Gilo, Moshe y Spiegel en su artículo "*Partial cross ownership and tacit collusion*" (2006). En él hablan de cómo las empresas invierten en sus competidores para obtener una participación en sus beneficios, sin intervenir en el poder de decisión de la otra empresa. Pues mientras que las fusiones horizontales de empresas llevan aparejadas una fuerte revisión por parte de los tribunales de defensa de la competencia, son más indulgentes con este tipo de inversiones, ya que la legislación respecto a estos acuerdos es mucho más laxa.

Por otro lado, al tener intereses en dos empresas, cuanto más alta sea esta participación en la empresa de la que no se es propietario, más alto será el interés en que esta obtenga beneficios mayores, dándose así una colusión de forma tácita o sutil. Se dará un equilibrio del que el empresario con participaciones no tendrá incentivos, en un principio, a romper.

Siguiendo esa senda, Malueg (1992) estudia los efectos coordinados de la propiedad parcial, mostrándonos dos problemas que se derivan de este tipo de propiedad en un juego de Cournot, ya que se presenta un efecto ambiguo en esta colusión o acuerdo tácito debido a efectos contrarios. Por un lado, la propiedad parcial implica que la empresa internaliza parte de las pérdidas que provoca en la otra empresa cuando se desvía, por ello se desincentiva el desviarse. Por otro lado, la propiedad parcial suaviza la competencia en el mercado de productos, y por ello incentiva a la empresa a desviarse del equilibrio hallado para ambos. Se supone que a nivel empírico el primer efecto domina el segundo, ya que si no las empresas no tendrían ningún incentivo a invertir en sus competidores.

Por todo lo explicado, está resurgiendo entre los investigadores el interés en las causas y consecuencias de esta propiedad parcial, bien ilustrado por Papadopoulos et al (2019). Los efectos contra la competitividad fueron estudiados hace ya años por investigadores como Reynolds y Snapp (1986), pero solo se documentaron empíricamente hace

relativamente poco. Estos efectos incluyen la bajada de la cantidad de output sacado al mercado, mayores precios para consumidores, aumento de las barreras de entrada, facilidad para la colusión o incluso mayores niveles de polución ambiental. En su trabajo, Papadopoulos et al (2019), examinan los incentivos a transferir de forma gratuita la tecnología innovadora de una empresa a otra en la que se tiene participación para producir bienes de mayor calidad. El compartir esta tecnología intensifica la competencia, lo que a su vez desincentiva el hacerlo. Pero, el aumentar la calidad de los productos del mercado hace que la disposición de los consumidores crezca y con ella los beneficios de la empresa. Por ello, como estudian en su trabajo, las grandes empresas solo estarán dispuestas a compartir su tecnología si tienen una cantidad suficiente de la propiedad de la otra empresa. Por ello, la propiedad parcial es un hecho importante a tener en cuenta a la hora de hablar de la transferencia de innovaciones. Pueden facilitar incluso inversiones de reducción de costes, que suelen llevar añadido bajadas de precios y mejoras del bienestar en la competencia en cantidades.

Aun así, adquirir una pequeña participación en una empresa rival, aunque debilita la ferocidad de la competencia, incentiva la transferencia de conocimientos, lo que disminuye los costes del rival, y finalmente se ve reflejado en los precios a los consumidores.

Por ello los beneficios que aporta la propiedad parcial en la difusión de tecnología, que incrementa la eficiencia de las industrias, superan a los efectos contra la competencia nombrados antes.

Introduciremos la propiedad parcial a través de dos modelos:

El modelo de Cournot, en el que especificaremos producto homogéneo, y costes marginales constantes y asimétricos.

El modelo de Hotelling, en el que especificaremos costes de transporte lineales, localizaciones fijas en los extremos del mercado lineal.

## **1.2 Objetivo del trabajo**

En este contexto, el objetivo del presente trabajo es analizar en un marco dinámico la estabilidad local del equilibrio de Nash en precios y cantidades surgidos en los modelos de Hotelling y Cournot, considerando dos empresas en la que una de ellas participa en la otra. Analizaremos bajo qué condiciones los equilibrios obtenidos son asintóticamente estables. Para incluir la perspectiva dinámica deberemos introducir supuestos sobre cómo se comportan las empresas en el tiempo. Ello nos llevará a estudiar diversos esquemas de expectativas que formulan las empresas, concretando en expectativas naïve (o Cournot), adaptativas y la regla del gradiente.

### **1.3 Estructura del trabajo**

El presente trabajo se estructurará en tres partes principales: el análisis de los modelos estáticos tanto Cournot como Hotelling. Continuaremos, en el capítulo 4, que constituye la parte central del trabajo, en la que analizaremos el tiempo. Consideraremos distintos esquemas de expectativas con los que incluiremos el dinamismo en el modelo y su posterior aplicación en cada uno de los modelos considerados. Posteriormente se procederá al análisis dinámico de los modelos planteados mediante técnicas cualitativas, calculando los puntos de equilibrio estacionarios y analizando su estabilidad dinámica. Para finalizar con las conclusiones del trabajo.

### **1.4 Asignaturas y materias relacionadas**

Para realizar este trabajo, se han combinado conocimientos de análisis dinámico y economía industrial. A lo largo del grado, ha habido varias asignaturas que son las que me han permitido realizar hoy este trabajo. Estas asignaturas son Matemáticas II, Microeconomía IV y Decisión y Juegos. En otras asignaturas introductorias a estas, como puede ser Microeconomía II, se analizan y se conocen los modelos de Cournot y Hotelling, de una manera muy superficial, siendo en las asignaturas de Decisión y Juegos y Microeconomía IV cuando se ahonda en estos temas, en temas de equilibrios como equilibrio de Nash o las funciones de mejor respuesta.

La asignatura Matemáticas II es la base del estudio de las ecuaciones diferenciales, herramienta principal de la dinámica en tiempo continuo, de la que hemos ampliado conocimientos para introducirnos en el tiempo discreto que se trabaja en esta memoria.

También, para ilustrar y complementar los resultados formales obtenidos de modelos se ha recurrido al software Mathematica, que este trabajo de fin de grado me ha permitido conocer.

## 2. Los modelos

Presentaremos ahora los modelos de partida: que como ya hemos dicho, introduciremos la propiedad parcial pasiva mediante el modelo de competencia en cantidades de Cournot y el modelo de Hotelling, de competencia en precios.

### 2.1 Modelo de Cournot

Siguiendo el modelo básico de Cournot (1838) consideramos el mercado de un bien homogéneo cuya función inversa de demanda adopta una forma lineal. Dándose una competencia en cantidades, también llamado juego *à la* Cournot.

Tendremos una función inversa de demanda lineal tal que:

$$P = a - bQ \text{ con } Q = q_1 + q_2 \text{ con } a, b > 0$$

El bien es producido por dos empresas con costes lineales, siendo los costes marginales respectivamente  $c_1$  y  $c_2$ . Obtenemos una función de costes lineales y asimétricos:

$$c_1(q_1) = c_1 q_1 \text{ y } c_2(q_2) = c_2 q_2$$

Además, se cumplirá que  $a > c_1 > c_2 > 0$ .

Barcena-Ruiz y Olaizola (2007) estudian esta diferencia en costes y disciernen su por qué. En él, al igual que vemos aquí, hay dos costes marginales diferentes, uno mayor que otro.  $c_1$  será el coste marginal mayor, y  $c_2$  será más pequeño. Aunque al estar numerados podemos adivinar a qué empresa pertenecerá cada coste, esto tiene una explicación lógica. Esto es debido a que la empresa 1, dirigida completamente por el empresario A, elegirá el tener un mayor coste marginal mientras que la empresa 2, dirigida mayoritariamente por el empresario B y en una cantidad  $\lambda$  por el empresario A, elegirá los costes marginales menores.

Esto es debido a varias razones: la primera es que la empresa 2 podrá sacar al mercado una cantidad de output mayor que la empresa 1 ya que solo la empresa 1 internaliza el hecho de que se está compitiendo en cantidades. La segunda razón es que una empresa es más agresiva cuando adopta unos costes marginales más pequeños que unos mayores. Por ello, el primer grupo de accionistas, que tiene propiedad en ambas empresas, tiene un incentivo a adoptar el coste marginal alto ( $c_1$ ). Mientras tanto, el segundo grupo de accionistas intentará hacer esta situación ventajosa, lo que hará ver reforzado su incentivo a adoptar el coste marginal más pequeño ( $c_2$ ).

Consideraremos dos grupos de accionistas A y B. El primero ostenta la totalidad de una de las empresas y una parte inferior al 50% de la otra, determinada por el parámetro  $\lambda$ . Por tanto, dicho grupo de accionistas no tiene poder de decisión sobre la segunda empresa. El modelo considerado debe entenderse en un contexto de delegación estratégica. Un grupo de accionistas (grupo A), en una primera etapa deciden el nivel de participación en



la empresa rival ( $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$ ) y en una segunda etapa, los gerentes compiten en el mercado a través de la elección de la cantidad. Nuestro objetivo será analizar la estabilidad dinámica del punto de equilibrio obtenido en la segunda etapa.

Este análisis se hace a partir de las funciones de beneficio de ambos grupos de accionistas. La función de los beneficios de ambas empresas se define según el parámetro  $\lambda$ , es decir, que el beneficio de ambos grupos de accionistas dependerá del porcentaje que tengan de la empresa 2. Además, estas funciones a su vez están definidas en torno a las funciones de beneficio de las empresas. Estas funciones de beneficio dependen de los ingresos y gastos de cada empresa, se definen de la forma:

$$\Pi_1 = [a - b(q_1 + q_2) - c_1]q_1$$

$$\Pi_2 = [a - b(q_1 + q_2) - c_2]q_2$$

Los beneficios individuales de cada empresa se combinan para formar las funciones de beneficio individual de cada grupo de accionistas.

$$\Pi_A(q_1, q_2) = \Pi_1 + \lambda\Pi_2 = [a - b(q_1 + q_2) - c_1]q_1 + \lambda[a - b(q_1 + q_2) - c_2]q_2 \quad (1)$$

$$\Pi_B(q_1, q_2) = (1 - \lambda)\Pi_2 = (1 - \lambda)[a - b(q_1 + q_2) - c_2]q_2 \quad (2)$$

## 2.2 Modelo de Hotelling

En este modelo veremos que, tenemos unos costes de transporte lineales y localizaciones fijas, tales que:  $a=0$  y  $b=1$ .

Supondremos el modelo básico de competencia espacial formulado por Hotelling (1929) en el que el mercado está representado por un segmento lineal de longitud unitaria a lo largo del cual se distribuyen de manera uniforme los consumidores. En dicho mercado compiten dos empresas que producen sus bienes homogéneos diferenciados en su localización, por ello están localizados en los extremos del segmento. La empresa 1 en el 0 y la empresa 2 en el 1.

Supondremos a efectos de simplificación que ambas empresas tienen costes marginales nulos y los costes de transporte asociados a adquirir una unidad son lineales con pendiente unitaria.

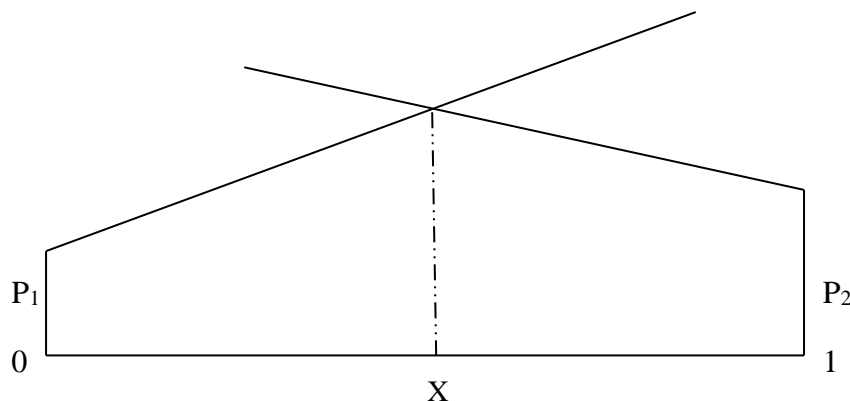


Figura 1

Tras este esquema, nos enfrentamos a unos supuestos:

- A efectos de simplificación, supondremos costes marginales nulos  $c_1=c_2=0$
- El coste de transporte por unidad de distancia se normaliza a 1( $t=1$ )

Llamamos X a la localización de un consumidor lineal indiferente.

Entre adquirir una unidad del bien a la empresa 1 o a la 2, las demandas capturadas por cada empresa se obtendrán a partir de las funciones:

$$x = \frac{p_2 - p_1 + 1}{2}, 1 - x = \frac{p_1 - p_2 + 1}{2}$$

Siendo  $p_1$  y  $p_2$  los precios de las empresas 1 y 2.

Como se ha hecho previamente, especificaremos las funciones de beneficio individual de cada empresa para, posteriormente, integrar estas funciones y obtener las funciones objetivo de los grupos de accionistas.

$$\Pi_1 = p_1 \frac{p_2 - p_1 + 1}{2}$$

$$\Pi_2 = p_2 \frac{p_1 - p_2 + 1}{2}$$

Obteniéndose unas funciones objetivo de los grupos de accionistas de la siguiente forma:

$$\Pi_A(p_1, p_2) = \Pi_1 + \lambda \Pi_2 = p_1 \frac{p_2 - p_1 + 1}{2} + \lambda p_2 \frac{p_1 - p_2 + 1}{2} \quad (3)$$

$$\Pi_B(p_1, p_2) = (1 - \lambda) \Pi_2 = (1 - \lambda) p_2 \frac{p_1 - p_2 + 1}{2} \quad (4)$$

### 3. Análisis estático

A continuación, obtendremos el equilibrio de Nash resultante de los modelos planteados en la segunda etapa en un contexto atemporal, mediante un análisis estático, es decir, sin tener en cuenta el tiempo.

#### 3.1 El modelo de Cournot

Obtendremos primero la función de mejor respuesta para la empresa 1, a partir de la maximización función objetivo para el grupo A:

$$\begin{aligned} \text{Máx}_{q_1} \Pi_A(q_1, q_2) &= [a - b(q_1 + q_2) - c_1]q_1 + \lambda[a - b(q_1 + q_2) - c_2]q_2 \\ \frac{\partial \Pi_A}{\partial q_1} &= a - 2bq_1 - bq_2 - c_1 - \lambda bq_2 = 0 \\ \text{FMR: } q_1 &= \frac{a - bq_2 - c_1 - \lambda bq_2}{2b} \end{aligned} \quad (5)$$

Posteriormente obtenemos la función de mejor respuesta para el grupo B, de la misma forma:

$$\begin{aligned} \text{Máx}_{q_2} \Pi_B(q_1, q_2) &= (1 - \lambda)[a - b(q_1 + q_2) - c_2]q_2 \\ \frac{\partial \Pi_B}{\partial q_2} &= a - bq_1 - 2bq_2 - c_2 - \lambda a + \lambda bq_1 + 2\lambda bq_2 + \lambda c_2 = 0 \\ \text{FMR: } q_2 &= \frac{a - bq_1 - c_2}{2b} \end{aligned} \quad (6)$$

La intersección de las funciones de reacción que define el equilibrio Cournot-Nash:

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{(1 - \lambda)a + (1 + \lambda)c_2 - 2c_1}{b(3 - \lambda)} \\ q_2^* &= \frac{a + c_1 - 2c_2}{b(3 - \lambda)} \end{aligned} \quad (7)$$

Finalmente demostraremos que el equilibrio obtenido maximiza cada una de las funciones objetivo planteadas, ya que se verifican las condiciones de segundo orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_A}{\partial q_1^2} &= -2b < 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi_B}{\partial q_2^2} &= -2b(1 + \lambda) < 0 \end{aligned}$$

Para que las cantidades de equilibrio sean no negativas, habremos de imponer la siguiente restricción sobre los parámetros:

$$2c_2 - a \leq c_1 \leq \frac{1}{2}[(1 - \lambda)a + (1 + \lambda)c_2]$$

Por último, realizaremos la estática comparativa, para ver cómo cambian las cantidades ofrecidas al mercado cuando se modifique la cantidad de la propiedad dada por el parámetro  $\lambda$  a partir de (7):

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_1^*}{\partial \lambda} &= \frac{-2a + 4c_2 - 2c_1}{b(3 - \lambda)^2} > 0 \\ \frac{\partial q_2^*}{\partial \lambda} &= \frac{a + c_1 - 2c_2}{b(3 - \lambda)} > 0\end{aligned}$$

Al obtener estas operaciones, vemos que obtenemos un efecto pro competitivo, ya que al aumentar el parámetro  $\lambda$  las cantidades ofrecidas al mercado también aumentarán.

### 3.2 El modelo de Hotelling

A partir de las funciones explicadas anteriormente, determinaremos el equilibrio en un contexto de competencia en precios.

$$\begin{aligned}\text{Máx}_{p_1} \Pi_A(p_1, p_2) &= \Pi_1 + \lambda \Pi_2 = p_1 x + \lambda p_2 (1 - x) \\ \frac{\partial \Pi_A}{\partial p_1} &= \frac{1}{2}(p_2 - 2p_1 + 1) + \frac{1}{2}(\lambda p_2) = 0 \\ \text{FMR: } p_1 &= \frac{p_2 + 1 + \lambda p_2}{2}\end{aligned}\tag{8}$$

Resolvemos de la misma forma para  $p_2$ :

$$\begin{aligned}\text{Máx}_{p_2} \Pi_B(p_1, p_2) &= (1 - \lambda)\Pi_2 = (1 - \lambda)p_2(1 - x) \\ \frac{\partial \Pi_B}{\partial p_2} &= (1 - \lambda)\frac{1}{2}(p_1 - 2p_2 + 1) = 0 \\ \text{FMR: } p_2 &= \frac{p_1 + 1}{2}\end{aligned}\tag{9}$$

A partir de las funciones de mejor respuesta y su intersección, definiendo el equilibrio de Hotelling-Nash:

$$p_1^* = \frac{3 + \lambda}{3 - \lambda} \quad (10)$$

$$p_2^* = \frac{3}{3 - \lambda}$$

Acabaremos demostrando que los puntos obtenidos son máximos, verificando el cumplimiento de las condiciones de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 \Pi_A}{\partial p_1^2} = -1 < 0$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_B}{\partial p_2^2} = -(1 - \lambda) < 0$$

Por último, como hemos hecho anteriormente, a partir de (10) analizaremos como varían los precios de ambas empresas cuando varíe el parámetro indicador de la propiedad parcial:

$$\frac{\partial p_1^*}{\partial \lambda} = \frac{6}{(3 - \lambda)^2} < 0$$

$$\frac{\partial p_2^*}{\partial \lambda} = \frac{3}{(3 - \lambda)^2} < 0$$

En este caso, al contrario que en el modelo de Cournot, el efecto será anticompetitivo, ya que los precios subirán al aumentar  $\lambda$ .

## **4. Análisis dinámico**

### **4.1 Introducción de la perspectiva temporal**

A continuación, se dinamizarán los modelos de partida. Al incluir el tiempo de forma discreta, los agentes toman sus decisiones en un periodo, manteniéndolas hasta el siguiente. Para ello usaremos ecuaciones en diferencias que se ocupan de variaciones finitas en las variables.

En el modelo de Cournot, al igual que en el modelo de Hotelling, si todas las empresas eligen su nivel de producción o precios que son de equilibrio o también llamado de Nash, ninguna empresa cambiará unilateralmente su nivel de equilibrio. Por ello, si no hay cooperación, el nivel de producción y precios de equilibrio de las empresas permanecerá estable.

Si ocurre al contrario y tanto el volumen de producción como el nivel de precios elegidos no son un equilibrio de Nash, como mínimo una empresa puede mejorar su beneficio, variando de forma unilateral las variables sobre las que pueden decidir. Como todas las empresas quieren maximizar su beneficio, siguen una conducta que optimice estos, o, dicho de otra forma, siguen una conducta racional. Por esto mismo todas las empresas actúan de forma simultánea de la misma manera cambiando los niveles de producción y precios a partir de la situación inicial. Así se llega a un proceso dinámico de ajustes sucesivos en estas variables de decisión que pueden llegar o no a una situación de equilibrio.

Las propiedades del sistema dinámico de ajuste dependerán de si el tiempo lo consideramos continuo o discreto y de las expectativas que formulen las empresas, es decir, como ajustan sus niveles de producción o precios.

Como hemos visto, consideraremos la competencia en el contexto de un duopolio por lo que el comportamiento deberá caracterizarse mediante un sistema dinámico discreto bidimensional.

Buscaremos la clave de este análisis, el equilibrio llamado estacionario. Este equilibrio se caracteriza por ser en el que las variables se mantienen constantes. Esto significa que, en ausencia de shocks exógenos, los niveles de las variables no cambian.

Hablaremos de carácter atractor del equilibrio cuando, tras una perturbación exógena, por el propio dinamismo del modelo, se vuelve a este mismo equilibrio.

Para el caso de un sistema dinámico lineal, el carácter estabilizador del equilibrio se puede realizar mediante dos procedimientos: sobre los valores propios de la matriz jacobiana del sistema dinámico evaluada en el equilibrio, analizando si el módulo de los valores propios de esta matriz sean menores que uno, si esto no se cumple, el equilibrio no será estable asintóticamente.

A veces los valores propios son difíciles de obtener, y hay tres condiciones que son equivalentes a la fórmula de los valores propios: son las llamadas las Condiciones de Schur. Se controla el cumplimiento de estas condiciones a través de la traza y el determinante obtenidos de la matriz jacobiana, sin que se necesite calcular los valores propios de la matriz. Para una revisión en profundidad véase *Gandolfo G. (1976) Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica Edit. Tecnos, Madrid.*

Con la aplicación de Mathematica, veremos los comportamientos de los equilibrios para unas velocidades de ajuste diferentes y cambiantes. Ilustrando y clarificando así lo obtenido mediante simulaciones.

## 4.2. Expectativas, formulación y desarrollo

Las expectativas vienen determinadas por el conocimiento que tienen las empresas de su entorno, conduciendo a un comportamiento más o menos racional.

En este apartado usaremos el tiempo discreto, del tipo  $t = 0, 1, 2 \dots$  donde cada unidad es un periodo de tiempo. Si suponemos que la función de demanda es conocida por todas las empresas del mercado, definimos los esquemas de expectativas basados en las funciones de mejor respuesta.

Para ejemplificar la formación de expectativas, usaremos la competencia en cantidades del modelo de Cournot:

Llamamos  $q_{i,t}$  a la cantidad ofrecida por la empresa  $i$  en el periodo  $t$ , la producción del próximo periodo será  $q_{i,t+1}$ , que dependerá de la expectativa que tenga sobre la producción de sus rivales en el próximo periodo.

En un contexto de duopolio, si las empresas cuentan con un conocimiento total de la función de demanda, la decisión de cada empresa resulta del problema de maximización del beneficio.

$$\text{Máx}_{q_{i,t+1}} \Pi_i(q_{i,t+1}, q_{j,t+1}^e); i \neq j, i, j = 1, 2$$

Donde  $q_{j,t+1}^e$  representa la expectativa de la empresa  $i$  sobre la cantidad producida por  $j$  en el periodo  $t+1$ . En el caso de que el problema de maximización tenga solución única, podemos llegar a relaciones del tipo tal que constituyen:

$$q_{i,t+1} = R(q_{j,t+1}^e); i \neq j, i, j = 1, 2$$

Que constituyen las funciones de mejor respuesta. Así, podemos identificar los siguientes esquemas de expectativas:

### 4.2.1 Expectativas *naïve* o de Cournot:

Constituyen el caso más simple de formación de expectativas. Suponen que cada empresa espera que su competidora no modifique su nivel de producción o precios con respecto al periodo anterior, es decir,  $q_{j,t+1}^e = q_{j,t}$  O en el caso del modelo de Hotelling:  $p_{j,t+1}^e = p_{j,t}$  Por lo que el sistema dinámico se definiría de forma:

$$T_N^C \equiv \begin{cases} q_{1,t+1} = R_1(q_{2,t}) \\ q_{2,t+1} = R_2(q_{1,t}) \end{cases} \quad T_N^H \equiv \begin{cases} p_{1,t+1} = R_1(p_{2,t}) \\ p_{2,t+1} = R_2(p_{1,t}) \end{cases}$$

Estas expectativas son ampliamente criticadas por su sencillez y no tener en cuenta ni el futuro ni el error cometido en el periodo anterior.

### 4.2.2 Expectativas adaptativas:

Son una generalización de las expectativas anteriores. En cada periodo, la empresa cambia su cantidad o precio producidos teniendo en cuenta el error cometido respecto del equilibrio en el periodo anterior. Este nivel de equilibrio vendría dado por su función de mejor respuesta.

Este tipo de expectativas son criticadas debido a que los agentes solo tienen en cuenta el pasado, y no los sucesos esperados en el futuro. Se dice también que son resultado del aprendizaje, pues al ir aprendiendo de sus errores, la diferencia con el valor de su función de mejor respuesta se puede ir acortando.

Formalmente se expresa como:

$$q_{i,t+1} - q_{i,t} = \beta_i (R_i(q_{j,t}) - q_{i,t}); 0 \leq \beta_i \leq 1; i \neq j, i, j = 1, 2.$$

Que da lugar a los sistemas dinámicos según se considere Cournot o Hotelling:

$$T_A^C \equiv \begin{cases} q_{1,t+1} = (1 - \beta_1)q_{1,t} + \beta_1 R_1(q_{2,t}) \\ q_{2,t+1} = (1 - \beta_2)q_{2,t} + \beta_2 R_2(q_{1,t}) \end{cases}$$

$$T_A^H \equiv \begin{cases} p_{1,t+1} = (1 - \beta_1)p_{1,t} + \beta_1 R_1(p_{2,t}) \\ p_{2,t+1} = (1 - \beta_2)p_{2,t} + \beta_2 R_2(p_{1,t}) \end{cases}$$

Donde  $\beta_i$  denota la propensión al cambio en la variable de decisión de un periodo a otro por parte de la empresa  $i$ . Si  $\beta_i = 0$ , la empresa no modifica su variable de producción en el periodo anterior y si es igual a 1, se sigue el esquema de expectativas *naïve*.

### 4.2.3 Regla del gradiente

Un supuesto implícito en las expectativas explicadas antes es aceptar que las empresas tienen un conocimiento total de la función de demanda. Si relajamos esta hipótesis, aparecen otros nuevos esquemas de expectativas con un menor nivel de racionalidad por parte de las empresas. Un caso habitualmente usado es la regla del gradiente, basada en el beneficio marginal.



Seguendo el esquema, en cada periodo de tiempo, la empresa aumenta o reduce su nivel de precios o cantidad si su beneficio marginal  $\frac{\partial \Pi_{i,t}}{\partial q_{i,t}}$ , es positivo o negativo respectivamente.

Formalmente se traduciría en:

$$q_{i,t+1} - q_{i,t} = \alpha_i(q_{i,t}) \frac{\partial \Pi_i(q_{1,t}, q_{2,t})}{\partial q_i}, i = 1, 2$$

La función  $\alpha_i(q_{i,t}) > 0$  representa la velocidad de ajuste de la empresa  $i$ .

Por simplicidad, se supone una relación lineal de la forma:  $\alpha_i(q_{i,t}) = \alpha_i * q_{i,t}$ ;  $\alpha_i > 0$

$$T_G^C \equiv \begin{cases} q_{1,t+1} = q_{1,t} + \alpha_1 * q_{1,t} \frac{\partial \Pi_1}{\partial q_{1,t}} \\ q_{2,t+1} = q_{2,t} + \alpha_2 * q_{2,t} \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_{2,t}} \end{cases}$$

$$T_G^H \equiv \begin{cases} p_{1,t+1} = p_{1,t} + \alpha_1 * p_{1,t} \frac{\partial \Pi_1}{\partial p_{1,t}} \\ p_{2,t+1} = p_{2,t} + \alpha_2 * p_{2,t} \frac{\partial \Pi_2}{\partial p_{2,t}} \end{cases}$$

Por simplicidad de cálculos veremos que:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ .

### 4.3 Desarrollo de los modelos dinámicos:

A partir de las funciones de reacción y de los equilibrios de Nash obtenidos anteriormente, y aplicando las expectativas explicadas, vamos a proceder al análisis dinámico en tiempo discreto.

#### 4.3.1 Expectativas *Naïve*

##### 4.3.1.a Modelo de Hotelling

Considerando el esquema de expectativas naïve, se define el siguiente modelo

$$T_N^H \equiv \begin{cases} p_{1,t+1} = \frac{1+(1+\lambda)p_{2,t}}{2} \\ p_{2,t+1} = \frac{1+p_{1,t}}{2} \end{cases}$$

En primer lugar, se calculan los puntos de equilibrio del sistema dinámico, imponiendo

$$p_{i,t+1} = p_{i,t} = p_i \text{ obtenemos el sistema de ecuaciones: } \begin{cases} p_1 = \frac{1+(1+\lambda)p_2}{2} \\ p_2 = \frac{1+p_1}{2} \end{cases}$$

Al resolverlo, obtenemos que el único punto de equilibrio es (10):

$$p_1^* = \frac{3+\lambda}{3-\lambda}$$

$$p_2^* = \frac{3}{3-\lambda}$$

Que coincide con el equilibrio de Nash obtenido en el modelo estático.

A partir del sistema de ecuaciones, obtenemos la matriz jacobiana, derivando parcialmente cada una de las ecuaciones en función de  $p_1$  y  $p_2$ :

$$J_{11} = \frac{\partial p_{1,t+1}}{\partial p_{1,t}}; J_{12} = \frac{\partial p_{1,t+1}}{\partial p_{2,t}}; J_{21} = \frac{\partial p_{2,t+1}}{\partial p_{1,t}}; J_{22} = \frac{\partial p_{2,t+1}}{\partial p_{2,t}}$$

A partir de estas ecuaciones, formamos la matriz jacobiana:

$$JT_N^H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+\lambda}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Al ser sus términos constantes, es independiente si lo evaluamos en el equilibrio o no.

Vamos ahora con el análisis de estabilidad del equilibrio:

Como se ha explicado antes, hay dos maneras equivalentes de hacerlo, mediante los valores propios de la jacobiana y mediante las condiciones de Schur. En este caso se usarán ambas maneras para ampliar la explicación, pero más adelante sólo usaremos esta última opción:

- Valores propios de la jacobiana

Obtenemos las raíces de la ecuación característica:

$$|J - \gamma I| = \begin{vmatrix} -\gamma & \frac{1+\lambda}{2} \\ \frac{1}{2} & -\gamma \end{vmatrix} = 0$$

$$\gamma^2 - \frac{1+\lambda}{4} = 0 \rightarrow \gamma = \pm \frac{\sqrt{1+\lambda}}{2}$$

La condición de estabilidad exige que  $|\gamma| < 1$ , que se verifica para todo  $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ . Por

ello concluimos que el equilibrio de Nash es asintóticamente estable para cualquier valor de  $\lambda$ . Cualesquiera que sean las condiciones iniciales, las trayectorias de los precios convergerán a los precios de equilibrio. Por ello, cualquier perturbación exógena que modifique el nivel de precios de equilibrio será temporal, ya que los precios volverán a su nivel de equilibrio.

- Condiciones de Schur:

Estas condiciones garantizan que los valores propios de la matriz jacobiana tengan módulo menor que uno, en términos de la traza y el determinante.

$$(i) F = 1 + T + D > 0$$

$$(ii) TC = 1 - T + D > 0$$

$$(iii) H = 1 - D > 0$$

Obteniendo la traza y el determinante en el punto de equilibrio tenemos:

$$T = 0; D = -\frac{1+\lambda}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} (i) F = \frac{3-\lambda}{4} > 0 \\ (ii) TC = \frac{3-\lambda}{4} > 0 \\ (iii) H = \frac{5+\lambda}{4} > 0 \end{array} \right\} \forall \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

Por tanto, se cumplen todas las condiciones, por lo que, como habíamos comprobado antes, el equilibrio será asintóticamente estable, o dicho de otra forma, obtenemos que el equilibrio de Nash es un atractor.

#### 4.3.1.b Modelo de Cournot

Partimos de las funciones de reacción y obtenemos el esquema de expectativas Cournot:

$$T_N^C = \begin{cases} q_{1,t+1} = \frac{a - bq_{2,t} - c_1 - \lambda bq_{2,t}}{2} \\ q_{2,t+1} = \frac{a - bq_{1,t} - c_2}{2b} \end{cases}$$

Como primer paso calculamos los puntos de equilibrio imponiendo  $q_{i,t+1} = q_{i,t} = q_i$  y

$$\text{obtenemos el sistema de ecuaciones} \begin{cases} q_1 = \frac{a - bq_2 - c_1 - \lambda bq_2}{2} \\ q_2 = \frac{a - bq_1 - c_2}{2b} \end{cases} \quad \text{Al resolverlo, vemos que}$$

el único punto de equilibrio es:

Obtenemos la jacobiana de la misma manera que en el caso del modelo de Hotelling, obteniendo, por lo que la jacobiana resultante es:

$$q_1^* = \frac{(1 - \lambda)a + (1 + \lambda)c_2 - 2c_1}{b(3 - \lambda)}$$

$$q_2^* = \frac{a + c_1 - 2c_2}{b(3 - \lambda)}$$

Que coincide con el punto de equilibrio o equilibrio de Nash obtenido en el caso estático.

A partir del sistema de ecuaciones derivamos parcialmente para obtener la jacobiana:

$$JT_N^C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1+\lambda}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Con una traza y determinante tal que:  $T = 0; D = -\frac{1+\lambda}{4}$

Como se puede observar, tanto la traza como el determinante obtenidos aquí coinciden con los obtenidos en el modelo de Hotelling, por tanto, el resultado es el mismo que se obtuvo anteriormente. Se puede concluir que todos los valores propios de la matriz jacobiana serán en módulo menor que 1. El equilibrio de Nash será asintóticamente estable y en consecuencia se puede considerar el equilibrio de Nash un atractor.

### 4.3.2 Expectativas adaptativas

#### 4.3.2.a Modelo de Hotelling

Introduciendo el esquema de expectativas adaptativas en el modelo de Hotelling obtenemos lo siguiente:

$$T_A^H \equiv \begin{cases} p_{1,t+1} = (1 - \beta_1)p_{1,t} + \beta_1 \frac{(1 + \lambda)p_{2,t} + 1}{2} \\ p_{2,t+1} = (1 - \beta_2)p_{2,t} + \beta_2 \frac{p_{1,t} + 1}{2} \end{cases} \quad \beta_1, \beta_2 \in [0, 1]$$

El único punto de equilibrio del sistema dinámico será el equilibrio de Nash obtenido en el sistema discreto. Obtenemos la matriz jacobiana, que aparece a partir del siguiente

esquema: 
$$\begin{aligned} p_1 &= (1 - \beta_1)p_1 + \beta_1 \frac{(1 + \lambda)p_2 + 1}{2} \\ p_2 &= (1 - \beta_2)p_2 + \beta_2 \frac{p_1 + 1}{2} \end{aligned}$$
 y queda de la siguiente manera:

$$JT_A^H = \begin{pmatrix} 1 - \beta_1 & \frac{\beta_1(1 + \lambda)}{2} \\ \beta_2 & 1 - \beta_2 \end{pmatrix}$$

Vemos que sus componentes son independientes de si se hace la valoración en el equilibrio o no.

Volvemos a usar las condiciones de Schur para analizar la estabilidad del equilibrio.

$$(i) F = 1 + T + D > 0$$

$$(ii) TC = 1 - T + D > 0$$

$$(iii) H = 1 - D > 0$$

Recordemos que lo analizaba a partir del determinante y traza de la matriz jacobiana.

$$T = 1 - \beta_1 + 1 - \beta_2 = 2 - \beta_1 - \beta_2$$

$$D = 1 - \beta_2 - \beta_1 + \left( \frac{3 - \lambda}{4} \right) \beta_1 \beta_2$$

A partir de aquí comenzamos comprobando la primera condición:

$$i) 1 + T + D > 0 \Rightarrow 4 - 2\beta_1 - 2\beta_2 + \left( \frac{3 - \lambda}{4} \right) \beta_1 \beta_2 > 0$$

Como  $\beta_i \in [0, 1]; \lambda \in \left[ 0, \frac{1}{2} \right); \forall \beta_i, \lambda$  se cumple la primera condición.

ii)  $1 - T - D > 0 \Rightarrow \left( \frac{5 + \lambda}{4} \right) \beta_1 \beta_2 > 0$  También se cumple esta condición.

iii)  $1 - D > 0 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 - \left( \frac{3 - \lambda}{4} \right) \beta_1 \beta_2 > 0 \rightarrow \beta_1 + \beta_2 \left[ 1 - \left( \frac{3 - \lambda}{4} \right) \beta_1 \right] = \beta_1 + \beta_2 \left[ \frac{4 - (3 - \lambda) \beta_1}{4} \right] > 0$

$$4 - (3 - \lambda) \beta_1 > 0$$

Esta condición también se cumple.

Por todo ello, vemos que el equilibrio, en el caso de las expectativas adaptativas, también será estable asintóticamente. Tras haberlo comprobado, a través del programa Mathematica, veremos cómo se converge al equilibrio.

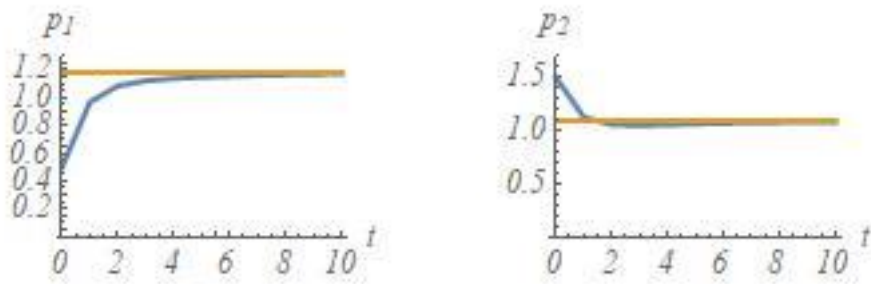


Figura 2 Trayectorias solución  $\beta_1 = 1/2$ ;  $\beta_2 = 1/2$ ;  $\lambda = 1/4$ ;  $p_{1,0} = .5$ ;  $p_{2,0} = 1.5$ ;

En esta figura, vemos las trayectorias solución. En ambas vemos la línea amarilla, que indica la trayectoria teórica que marca el equilibrio para cada una de las dos variables a examen en este caso. Posteriormente, la línea azul marca la trayectoria real, en la que vemos el shock exógeno inicial y cómo posteriormente vuelve a coincidir con el equilibrio.

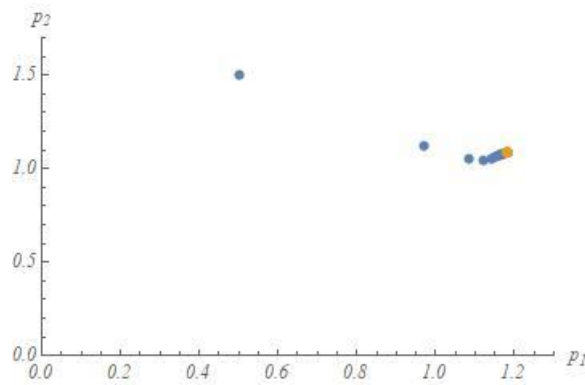


Figura 3 Plano de fases  $\beta_1 = 1/2$ ;  $\beta_2 = 1/2$ ;  $\lambda = 1/4$ ;  $p_{1,0} = .5$ ;  $p_{2,0} = 1.5$ ;

En este último plano de fases, en el que se quiere marcar cómo se converge al equilibrio, pero en este caso, para marcar que usamos el tiempo en un modo discreto, lo hacemos mediante puntos. El punto más alejado del equilibrio es el inicio de la trayectoria, al que se llega tras el shock, y posteriormente nos acercamos al equilibrio en sucesivas fases, marcado en amarillo.

### 4.3.2.b Modelo de Cournot

Partiendo del esquema de expectativas, seguiremos el mismo proceso que anteriormente. El esquema de expectativas adaptativas quedara tal que:

$$T_A^C \equiv \begin{cases} q_{1,t+1} = (1 - \beta_1)q_{1,t} + \beta_1 \left( \frac{a - bq_{2,t} - c_1 - \lambda bq_{2,t}}{2b} \right) \\ q_{2,t+1} = (1 - \beta_2)q_{2,t} + \beta_2 \left( \frac{a - bq_{1,t} - c_2}{2b} \right) \end{cases}$$

El estado estacionario de este sistema se corresponde con el equilibrio de Nash.

Como expliqué anteriormente, la condición que debe cumplirse para que el equilibrio sea estable, es que los valores propios de la matriz jacobiana sean, en módulo, mayores que uno. Usaremos las condiciones de Schur para comprobar si esto se cumple.

Por ello, buscamos la jacobiana en el siguiente esquema:

$$q_1 = (1 - \beta_1)q_1 + \beta_1 \left( \frac{a - bq_2 - c_1 - \lambda bq_2}{2b} \right) \quad \text{del mismo, la jacobiana:}$$

$$q_2 = (1 - \beta_2)q_2 + \beta_2 \left( \frac{a - bq_1 - c_2}{2b} \right)$$

$$JT_A^C = \begin{pmatrix} 1 - \beta_1 & -\beta_1 \left( \frac{1 + \lambda}{2} \right) \\ \frac{-\beta_2}{2} & 1 - \beta_2 \end{pmatrix}$$

A partir de la misma, obtenemos la traza y el determinante:

$$T = 1 - \beta_1 + 1 - \beta_2 = 2 - \beta_1 - \beta_2$$

$$D = 1 + \beta_1\beta_2 - \beta_2 - \beta_1 + \frac{\beta_1\beta_2 + \lambda\beta_1\beta_2}{4} = 1 - \beta_2 - \beta_1 + \left( \frac{3 - \lambda}{4} \right) \beta_1\beta_2$$

Como se puede observar, tanto la traza como el determinante obtenidos en el modelo de Cournot coinciden con los obtenidos en el modelo de Hotelling, por ello lo siguiente es evidente: Las tres condiciones se cumplen, por lo que el equilibrio será asintóticamente estable. Vemos que, tras un shock exógeno, desde cualquier punto de partida, la trayectoria de las cantidades y los precios, vistos en los modelos de Hotelling y Cournot, volverán al equilibrio.

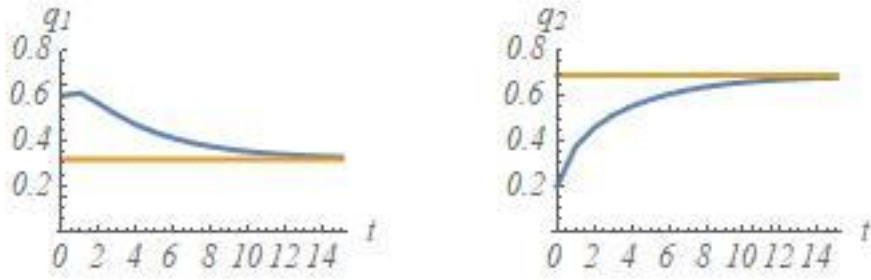


Figura 4 Trayectorias solución  $\beta_1 = 1/2; \beta_2 = 1/2; \lambda = 1/4; b = 1; c_1 = 0.5; c_2 = 0.3; a = 2; q_{1,0} = .6; q_{2,0} = .2;$

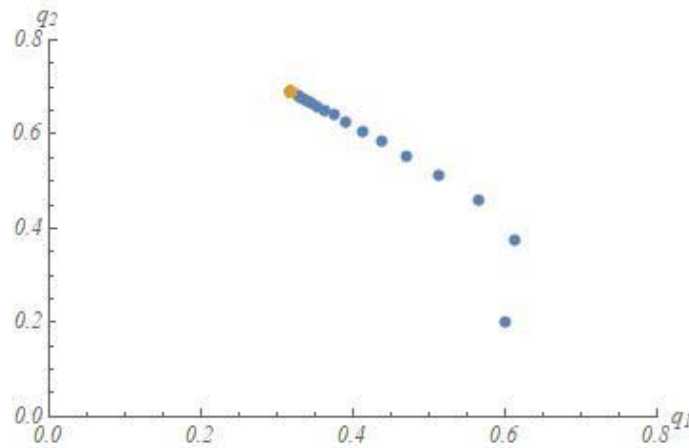


Figura 5 Plano de fases  $\beta_1 = 1/2; \beta_2 = 1/2; \lambda = 1/4; b = 1; c_1 = 0.5; c_2 = 0.3; a = 2; q_{1,0} = .6; q_{2,0} = .2;$

Aquí volvemos a observar cómo, en todos los casos, las trayectorias tras el shock vuelven a converger al punto amarillo, que marca el equilibrio, tras el shock exógeno tanto en la figura 4 como en la 5.

### 4.3.3 Regla del gradiente

Como se ha explicado antes, en la regla del gradiente se relaja la hipótesis de total conocimiento del mercado y su curva de demanda. Apareciendo un sistema dinámico no lineal, complicando las ecuaciones, y apareciendo umbrales, a partir de los cuales el equilibrio no será estable, perderá estabilidad. Analizaremos pues, la forma que tienen de acercarse al equilibrio, si es que lo hacen, fijándonos en las velocidades de ajuste de las empresas.

Por ello, el camino que seguiremos para comprobar la estabilidad será el mismo, es decir, a través de las condiciones de Schur veremos para qué valores de la velocidad de ajuste de las empresas el equilibrio será estable o inestable. Dentro de la inestabilidad veremos que cuanto más se aleje este valor  $\alpha$  de sus umbrales, la dinámica transitoria irá aumentando en complejidad.



### 4.3.3.a Modelo de Hotelling

Partiendo del esquema de expectativas, aplicado al modelo con el que trabajamos:

$$T_G^H \equiv \begin{cases} p_{1,t+1} = p_{1,t} + \alpha p_{1,t} \frac{(1+\lambda)p_{2,t} + 1 - 2p_{1,t}}{2} \\ p_{2,t+1} = p_{2,t} + \alpha p_{2,t} \frac{(1-\lambda)(p_{1,t} + 1 - 2p_{2,t})}{2} \end{cases}$$

A partir de este esquema obtenemos los puntos fijos del sistema. De los que forma parte el equilibrio de Nash obtenido anteriormente en la resolución estática.

Puntos fijos:

$$(0,0); \left(\frac{1}{2}, 0\right); \left(0, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{3+\lambda}{3-\lambda}, \frac{3}{3-\lambda}\right)$$

Los tres primeros puntos fijos obtenidos son puntos frontera, el segundo y el tercero son casos de monopolio, en el que una empresa expulsa a la otra del mercado, y se puede comprobar fácilmente que no serán estables. En el caso del primero, ninguna empresa produce ninguna cantidad del bien. Solo analizaremos la estabilidad del punto que nos interesa para este trabajo, el punto interior  $\left(\frac{3+\lambda}{3-\lambda}, \frac{3}{3-\lambda}\right)$ . Por tanto, pasamos a analizar

la jacobiana y obtener tanto el determinante como la traza.

$$JT_G^H = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \frac{[(1+\lambda)p_2 + 1 - 4p_1]}{2} & \frac{(1+\lambda)\alpha p_1}{2} \\ \frac{(1-\lambda)\alpha p_2}{2} & 1 + \alpha \frac{[(1-\lambda)(p_1 + 1 - 4p_2)]}{2} \end{pmatrix}$$

Evaluamos el punto de equilibrio interior en la jacobiana.

$$JT_H^G = \begin{pmatrix} 1 - \alpha \frac{3+\lambda}{3-\lambda} & \frac{(3+4\lambda+\lambda^2)\alpha}{2(3-\lambda)} \\ \frac{3\alpha(1-\lambda)}{2(3-\lambda)} & 1 + \alpha \frac{3(\lambda-1)}{3-\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha p_1^* & \alpha \frac{1+\lambda}{2} p_1^* \\ \alpha \frac{1-\lambda}{2} p_2^* & 1 + \alpha p_2^*(\lambda-1) \end{pmatrix}$$

A partir de la jacobiana obtenemos la traza y el determinante para analizar la estabilidad del equilibrio.

$$T = 2 - 2\alpha$$

$$D = 1 - 2\alpha + \frac{3\alpha^2(1-\lambda)(3+\lambda)}{4(3-\lambda)}$$

Como podemos observar, el determinante y la traza se pueden relacionar mediante una nueva ecuación, en la que aparece  $M$ , una parte de la ecuación que sabemos que siempre será positiva.  $D = T - 1 + M$

Siendo  $M$  una función tal que:  $M = \frac{3\alpha^2(1-\lambda)(3+\lambda)}{4(3-\lambda)}$  Gracias a esto podemos convertir todas las condiciones de Schur:

$$i) 1 + T + D > 0 \rightarrow 1 + T + T - 1 + M > 0 \rightarrow 2T + M > 0 \text{ ¿?}$$

$$ii) 1 - T + D > 0 \rightarrow 1 - T + T - 1 + M > 0 \rightarrow M > 0$$

$$iii) 1 - D > 0 \rightarrow 1 - T + 1 - M > 0 \rightarrow 2 - T - M > 0 \text{ ¿?}$$

Sabemos que la segunda condición siempre se cumplirá, ya que sabemos que  $M$  siempre es positiva. Lo que no estaremos seguros es de si se cumplen las condiciones uno y tres, que será lo que comprobaremos más adelante.

Comenzaremos analizando la tercera condición:

$$iii) 1 - D > 0 \rightarrow 2 - T - M > 0$$

$$2 - 2 + 2\alpha - \frac{3\alpha^2(1-\lambda)(3+\lambda)}{4(3-\lambda)} > 0$$

$$\alpha < \alpha_1 = \frac{8(3-\lambda)}{3(1-\lambda)(3+\lambda)}$$

Obtenemos  $\alpha_1$  y el resto de los parámetros, es decir, las dos últimas  $\alpha$  las obtendremos a partir de la primera condición.

$$i) 1 + T + D > 0 \rightarrow 2T + M > 0$$

$$4 - 4\alpha + \frac{3\alpha^2(1-\lambda)(3+\lambda)}{4(3-\lambda)} > 0$$

Para estudiar si esta condición es cierta, estudiamos una parábola

Con  $A = \frac{3(1-\lambda)(3+\lambda)}{4(3-\lambda)}$ ;  $B = -4$ ;  $C = 4$  calculamos ahora el vértice de la parábola, junto a

su imagen, para comprobar su posición respecto al eje de abscisas, comprobando así cuándo se cumple la restricción i).

$$y(\alpha) = A\alpha^2 + B\alpha + C$$

$$\begin{aligned} y\left(\frac{-B}{2A}\right) &= C - \frac{B^2}{4A} = 4 - \frac{16(3-\lambda)}{3(1-\lambda)(3+\lambda)} = \frac{4(1-\lambda)(3+\lambda) - 16(3-\lambda)}{3(1-\lambda)(3+\lambda)} = \frac{-4\lambda^2 - 24\lambda - 36}{3(1-\lambda)(3+\lambda)} = \\ &= \frac{-4(\lambda+3)^2}{3(1-\lambda)(3+\lambda)} < 0 \end{aligned}$$

Tras formular la ecuación de segundo grado, la resolvemos mediante el proceso habitual para resolver este tipo de ecuaciones, obteniendo así las raíces de la parábola:

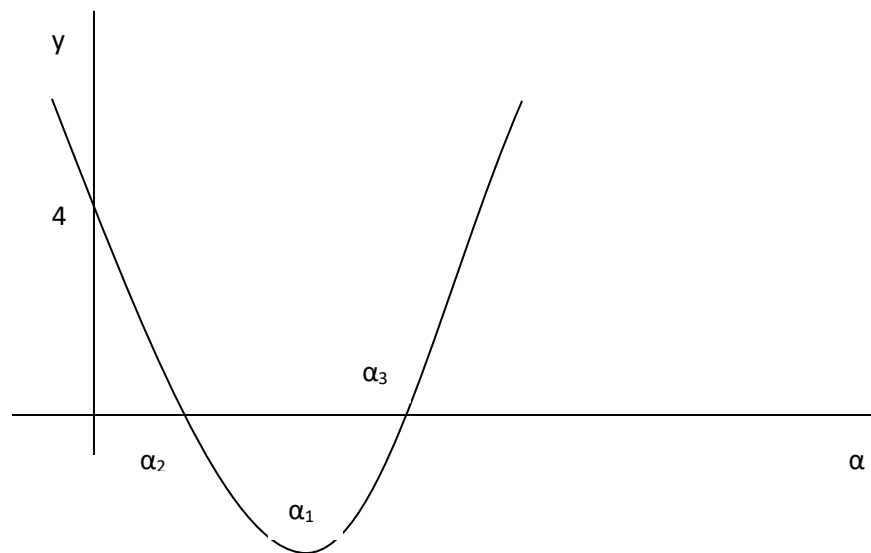
$$\alpha = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16A}}{2A} \rightarrow \frac{8(3 - \lambda) \pm 4\sqrt{(3 - \lambda)(3\lambda^2 + 2\lambda + 3)}}{3(1 - \lambda)(3 + \lambda)}$$

Como hemos dicho antes, a partir de aquí obtenemos las raíces de la parábola, que conforma el umbral para el valor de  $\alpha$  a partir del cual el equilibrio será estable.

De la resolución de la ecuación de segundo grado obtenemos:

$$\alpha_2 = \frac{8(3 - \lambda) - 4\sqrt{(3 - \lambda)(3\lambda^2 + 2\lambda + 3)}}{3(1 - \lambda)(3 + \lambda)}$$

$$\alpha_3 = \frac{8(3 - \lambda) + 4\sqrt{(3 - \lambda)(3\lambda^2 + 2\lambda + 3)}}{3(1 - \lambda)(3 + \lambda)}$$



Se verifica pues que  $\alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_3$ . Esto implica que las condiciones de Schur se cumplirán si  $\alpha \in (0, \alpha_2)$ , para valores mayores que  $\alpha_2$  el equilibrio dejará de ser estable, ya que se incumplirá alguna de las condiciones de Schur.

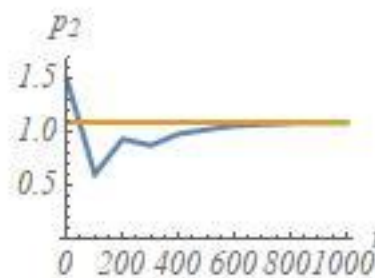
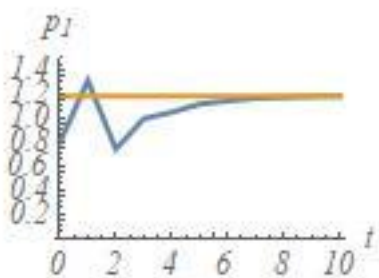


Figura 6 Trayectorias solución:  $\lambda = \frac{1}{4}$ ;  $\alpha = 1$ ;  $p_{1,0} = .8$ ;  $p_{2,0} = 1.5$

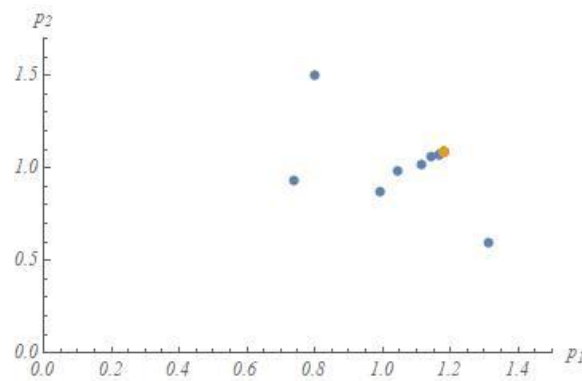


Figura 7 Plano de fases:  $\lambda = \frac{1}{4}$ ;  $\alpha = 1$ ;  $p_{1,0} = .8$ ;  $p_{2,0} = 1.5$

En estas dos figuras vistas aquí, observamos que, para estos parámetros dados, el equilibrio es asintóticamente estable. Es decir, que nos encontramos por debajo del umbral de las velocidades de ajuste. Por ello, tras un shock exógeno, se volverá al equilibrio. Aunque de una manera no tan clara como en casos anteriores, ya que las trayectorias no son tan directas.

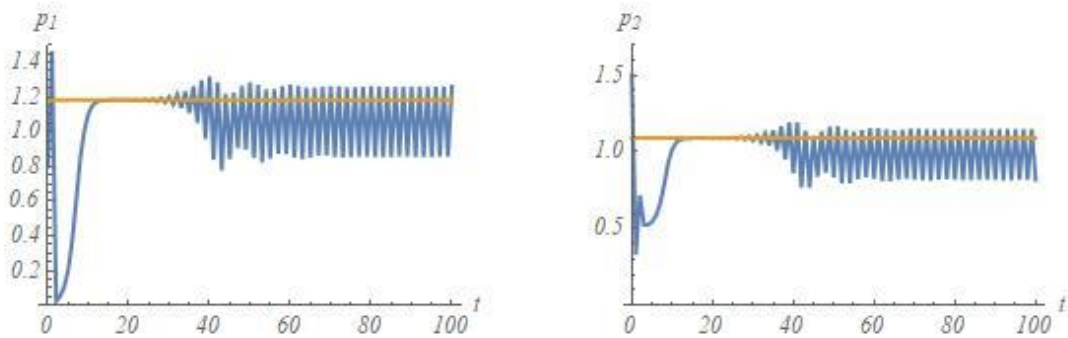


Figura 8. Trayectorias solución:  $\lambda = \frac{1}{4}$ ;  $\alpha = 1.3$ ;  $p_{1,0} = .8$ ;  $p_{2,0} = 1.5$

En este caso, observamos que ya no volvemos al equilibrio, si no que oscilamos en torno a él en una trayectoria infinita en la que vemos lo que se llama un dos-ciclo. En este caso se complica la predicción, nos hemos alejado de este umbral de equilibrio de las velocidades de ajuste. Como podemos ver, la trayectoria real de las variables se mueve en dos ciclos que se repiten continuamente.

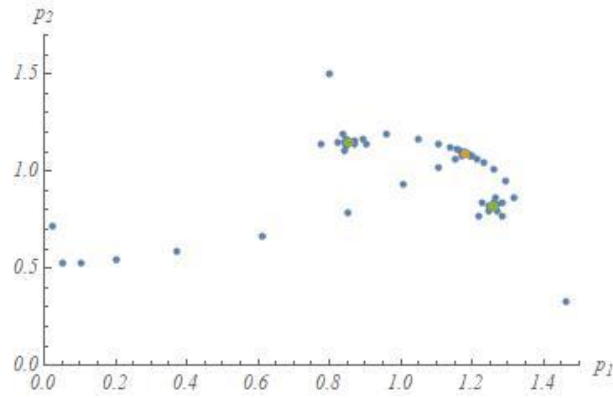


Figura 9. Plano de fases:  $\lambda = \frac{1}{4}$ ;  $\alpha = 1.3$ ;  $p_{1,0} = .8$ ;  $p_{2,0} = 1.5$

En el plano de fases lo explicado antes se observa mejor, como podemos ver el punto amarillo sigue siendo el equilibrio, pero no se llega a él, sino que estamos en un ciclo que se mueve en torno a él, como marcan los dos puntos verdes. La existencia de estos dos puntos, y que nos movemos de uno a otro es por lo que a este caso concreto se le llama un dos-ciclo.

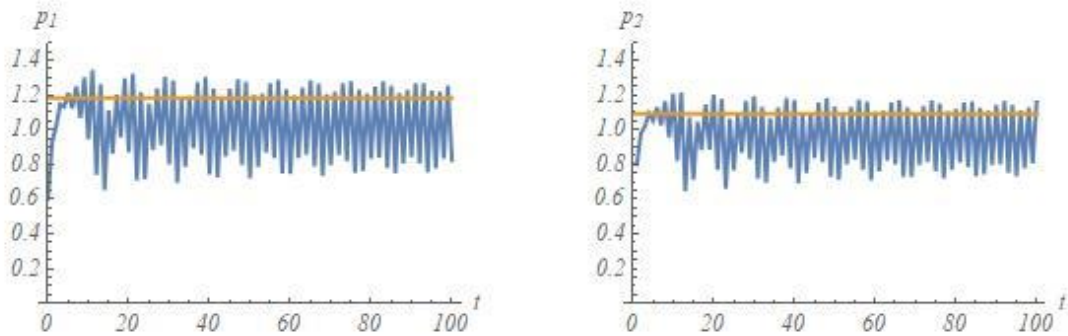


Figura 10. Trayectorias solución:  $\lambda = \frac{1}{4}$ ;  $\alpha = 1.3$ ;  $p_{1,0} = .8$ ;  $p_{2,0} = 1.5$

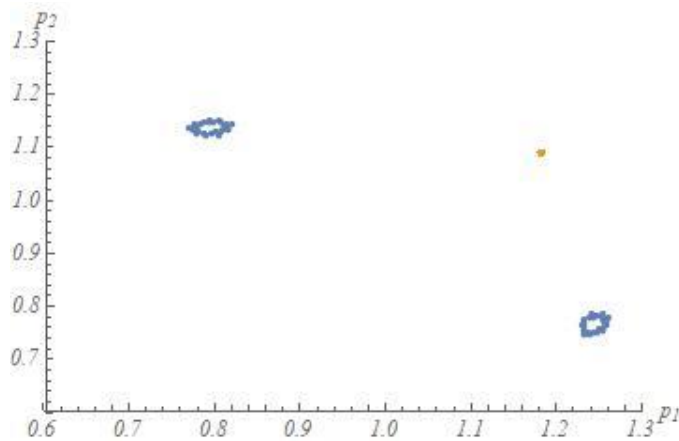


Figura 11. Plano de fases:  $\lambda = \frac{1}{4}$ ;  $\alpha = 1.38$ ;  $p_{1,0} = .6$ ;  $p_{2,0} = .8$

Por último, en las figuras 10 y 11, vemos caso de caos, en él es imposible predecir, pues como vemos, las trayectorias son completamente aleatorias. Como se ve más claramente en el plano de fases las trayectorias siguen un comportamiento totalmente caótico.

Gracias al programa Mathematica, hemos visto la dinámica transitoria tras un shock exógeno. Hemos dado valores a las variables y visto cómo se acercan al equilibrio de nuevo, o no. Vemos que si a  $\alpha$  le damos un valor que esté dentro del intervalo indicado antes, obtenemos que el equilibrio de Nash es un atractor, y conforme nos vamos alejando de este intervalo, el equilibrio ya no es estable, no se retorna a él después del shock.

Aun así, dentro de esta inestabilidad, podemos diferenciar diferentes grados o niveles. En primer lugar, cuando la velocidad de ajuste de las empresas aún está cerca del intervalo estable, pero no dentro, podemos ver en el gráfico un llamado dos-ciclo. En este caso, aún se podría predecir con algo de rigor, lo que va a ocurrir en el futuro, ya que hay varios puntos que se repiten a lo largo del tiempo. Cuanto más nos vamos alejando de este intervalo, o llamándolo de otra forma, de este umbral de estabilidad, vemos que la inestabilidad cada vez es más acentuada. Llegando a la inestabilidad máxima, o caos, en la que es totalmente imposible predecir nada, ya que nunca vamos a saber en qué punto estamos.

Seguidamente, vamos a estudiar la influencia de la propiedad parcial sobre la estabilidad del equilibrio. Para ello, se analiza el efecto de una variación del parámetro  $\lambda$  sobre el umbral de estabilidad de la velocidad de ajuste.

Tal y como se observa en la siguiente figura, existe una relación decreciente entre  $\alpha_2$  y  $\lambda$ . Por tanto, una mayor participación de la empresa 1 en el beneficio de la empresa 2, reduce el valor del umbral y las posibilidades de que el equilibrio sea asintóticamente estable.

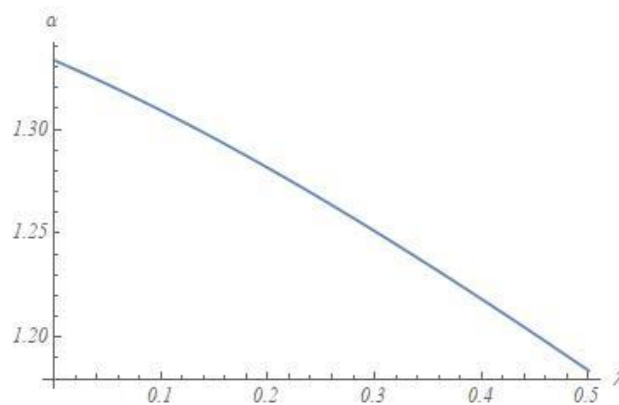


Figura 12. Umbral de estabilidad  $\alpha(\lambda)$

#### 4.3.3.b Modelo de Cournot:

A partir del esquema de expectativas explicado antes, y, aplicándolo a nuestro modelo:

$$T_G^C = \begin{cases} q_{1,t+1} = q_{1,t} + \alpha_1 q_{1,t} (a - c_1 - b(2q_{1,t} + q_{2,t}(1 + \lambda))) \\ q_{2,t+1} = q_{2,t} + \alpha_2 q_{2,t} (a - b(q_{1,t} + 2q_{2,t}) + c_2(\lambda - 1) - \lambda a + \lambda b(q_{1,t} + 2q_{2,t})) \end{cases}$$

Como sabemos, los puntos fijos que obtengamos serán por un lado situaciones extremas o de monopolio, también llamados equilibrios frontera, y el equilibrio de Nash obtenido en el caso estático.

Puntos fijos:  $(0,0); \left(0, \frac{a-c_2}{2b}\right); \left(\frac{a-c_1}{2b}, 0\right)$  El punto de equilibrio interior que analizaremos será  $\left(\frac{(1-\lambda)a + (1+\lambda)c_2 - 2c_1}{b(3-\lambda)}, \frac{a+c_1-2c_2}{b(3-\lambda)}\right)$ . El cual corresponde al equilibrio de Cournot

Este último punto, llamado punto de equilibrio interior, será el único interesante para nuestro análisis de estabilidad. En este caso, será estable para unos  $\alpha$  dados, esto es, dentro de unos umbrales la estabilidad estará asegurada, pero fuera de ellos el equilibrio será inestable, y más cuanto más se aleje de estos valores umbral

La Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio, queda de la siguiente forma:

$$JT_G^C = \begin{pmatrix} 1-2b\alpha q_1^* & -\alpha q_1^* b(1+\lambda) \\ -\alpha q_2^* b(1-\lambda) & 1-2b\alpha(1-\lambda)q_2^* \end{pmatrix}$$

Como hemos hecho anteriormente, calcularemos la traza y el determinante para analizar la estabilidad del equilibrio mediante las condiciones de Schur:

$$T = 2 - 2b\alpha(q_1^* + (1-\lambda)q_2^*)$$

$$D = 1 - 2b\alpha(q_1^* + (1-\lambda)q_2^*) + \alpha^2 b^2 q_1^* q_2^* (1-\lambda)(3-\lambda)$$

Se vuelve a cumplir lo visto antes,  $D=T-1+M$  siendo  $M = \alpha^2 b^2 q_1^* q_2^* (1-\lambda)(3-\lambda) > 0$  pues  $0 \leq \lambda < \frac{1}{2}$ .

Por tanto, ahora aplicando las condiciones de Schur:

$$i) 1+T+D > 0 \rightarrow 1+T+T-1+M > 0 \rightarrow 2T+M > 0; ?$$

$$ii) 1-T+D > 0 \rightarrow 1-T+T-1+M > 0 \rightarrow M > 0$$

$$iii) 1-D > 0 \rightarrow 1-T+1-M > 0 \rightarrow 2-T-M > 0; ?$$

Sabemos que la segunda condición se cumplirá siempre, comprobaremos ahora la primera y tercera condición. Como hicimos previamente, comenzaremos analizando la tercera condición:

$$iii) 1-D > 0 \rightarrow 1-T+1-M > 0 \rightarrow 2-T-M > 0$$

$$2-2+2b\alpha(q_1^* + (1-\lambda)q_2^*) - \alpha^2 b^2 q_1^* q_2^* (1-\lambda)(3-\lambda) > 0$$

$$\alpha < \alpha_1 = \frac{2(q_1^* + (1-\lambda)q_2^*)}{bq_1^* q_2^* (1-\lambda)(3-\lambda)}$$

Hemos obtenido aquí  $\alpha_1$ . Luego,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  las obtendremos a partir de la primera condición.

$$i) 1 + T + D > 0 \rightarrow 1 + T + T - 1 + M > 0 \rightarrow 2T + M > 0?$$

$$y(\alpha) = 4 + 4\alpha b(-q_1^* - (1-\lambda)q_2^*) + \alpha^2 b^2 q_1^* q_2^* (1-\lambda)(3-\lambda) > 0$$

$$y(\alpha) = A\alpha^2 + B\alpha + C$$

Como hemos hecho en el modelo de Hotelling, analizamos la posición del vértice de la parábola para ver dónde se encuentra y hacia dónde se dirigen sus brazos.

$$\text{Con } A = b^2 q_1^* q_2^* (1-\lambda)(3-\lambda); B = -4b(q_1^* + (1-\lambda)q_2^*); C = 4$$

Vemos que, al resolver la siguiente ecuación, para hallar el vértice de la parábola y su

imagen:

$$y\left(\frac{-B}{2A}\right) = C - \frac{B^2}{4A} = 4 - \frac{16b^2(q_1^* + (1-\lambda)q_2^*)^2}{4b^2 q_1^* q_2^* (1-\lambda)(3-\lambda)} = 4 - \frac{4(q_1^* + (1-\lambda)q_2^*)^2}{q_1^* q_2^* (1-\lambda)(3-\lambda)} =$$

$$= \frac{-q_2^*(4\lambda^2 q_2^{*2} - 4\lambda q_2^* + 4q_2^* - 4q_1^* + 8\lambda q_1^* - 4\lambda^2 q_1^{*2}) - 4q_1^*}{q_1^* q_2^* (1-\lambda)(3-\lambda)} < 0$$

obtenemos que el vértice de la parábola estará posicionado por debajo del eje  $\alpha$ , o eje de abscisas.

A partir de aquí, formulamos la resolución de la ecuación de segundo grado que resolveremos para obtener los vértices de la parábola.

$$y(\alpha) = A\alpha^2 + B\alpha + C$$

$$\alpha = \frac{-4\alpha b(-q_1^* - (1-\lambda)q_2^*) \pm \sqrt{(4\alpha b(-q_1^* - (1-\lambda)q_2^*))^2 - 16b^2 q_1^* q_2^* (1-\lambda)(3-\lambda)}}{2b^2 q_1^* q_2^* (1-\lambda)(3-\lambda)}$$

Resolviendo esta ecuación, de la que obtenemos las raíces, obtenemos  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$ .

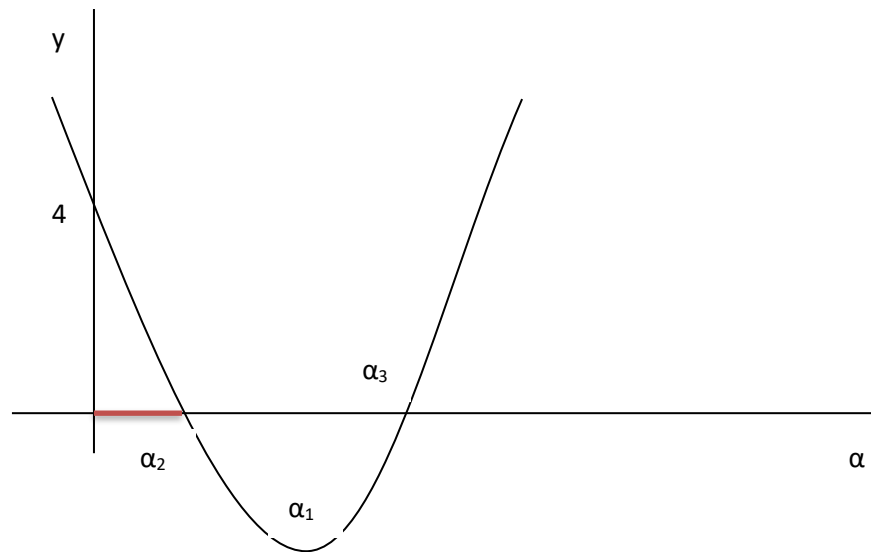
$$\alpha_2(a, b, c_1, c_2, \lambda) = \frac{2\left(q_1^* + (1-\lambda)q_2^* - \sqrt{q_1^{*2} + (1-\lambda)^2 q_2^* (q_2^* - q_1^*)}\right)}{b q_2^* q_1^* (1-\lambda)(3-\lambda)}$$

$$\alpha_3(a, b, c_1, c_2, \lambda) = \frac{2\left(q_1^* + (1-\lambda)q_2^* + \sqrt{q_1^{*2} + (1-\lambda)^2 q_2^* (q_2^* - q_1^*)}\right)}{b q_2^* q_1^* (1-\lambda)(3-\lambda)}$$

Donde  $(q_1^*, q_2^*)$  son el equilibrio de Nash.

Podemos ver que queda que  $\alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_3$  y se forma una parábola en la que vemos que el equilibrio solo se dará cuando  $\alpha \in (0, \alpha_2)$  Esto significa que las condiciones de Schur, y por tanto la condición de estabilidad de que los valores propios de la jacobiana son en módulo menores que uno, solo se cumplirán en este intervalo.





De nuevo, mediante el programa Mathematica, veremos de forma gráfica la estabilidad de los equilibrios. Como se hizo previamente con el modelo de Hotelling, podemos ver que, dentro del intervalo, el equilibrio será estable, y tras un shock exógeno, volveremos a él. Conforme nos vayamos alejando del umbral de estabilidad, el equilibrio será inestable, y cada vez más. Vemos que se repite el caso del dos-ciclo, en el que aún podríamos predecir, luego vemos que aparece un cuatro-ciclo, en el que incluso es más complicado predecir.

Pasamos, tras esto, a observar el gráfico de caos, observamos movimientos circulares de los puntos, en los que es imposible obtener nada en claro, ya que, debido a la infinitud de puntos, no podemos saber dónde nos encontramos con antelación, o saber qué punto es el próximo.

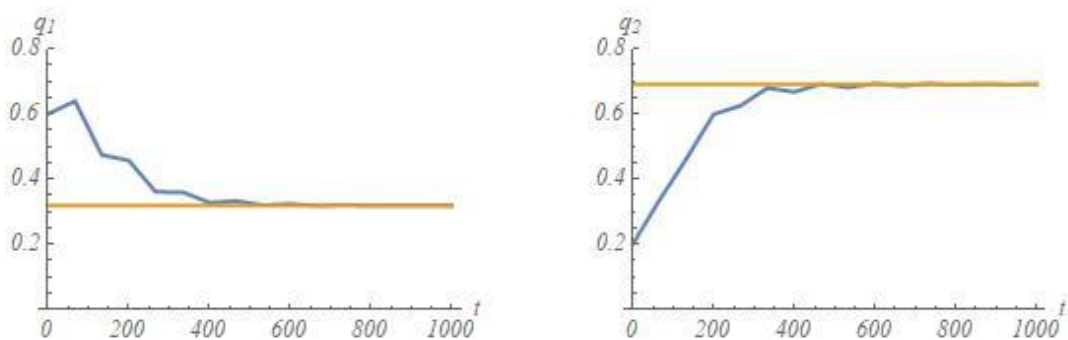


Figura 13. Trayectorias solución:  $\lambda = 1/4$ ;  $b = 1$ ;  $c_1 = 0.5$ ;  $c_2 = 0.3$ ;  $a = 2$ ;  $\alpha = 1.3$ ;  $q_{1,0} = .6$ ;  $q_{2,0} = .2$

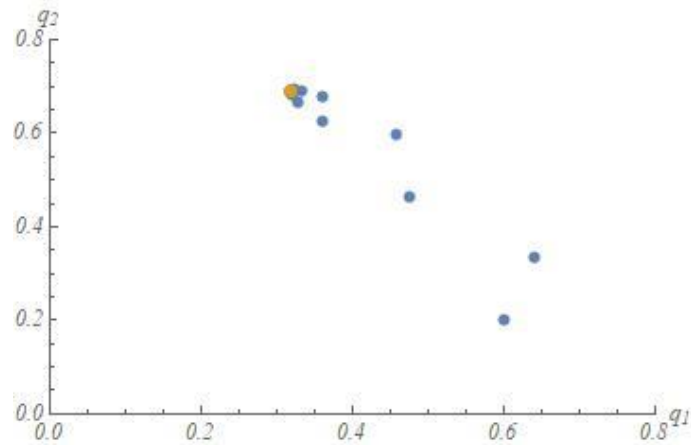


Figura 14. Plano de fases:  $\lambda = 1/4$ ;  $b = 1$ ;  $c1 = 0.5$ ;  $c2 = 0.3$ ;  $a = 2$ ;  $\alpha = 1.3$ ;  $q_{1,0} = .6$ ;  $q_{2,0} = .2$

En estas primeras figuras se observa lo ya visto a lo largo de este trabajo. Hemos visto que, al estar la velocidad de ajuste entre los parámetros del intervalo umbral, el equilibrio será estable. Por ello, como se observa, tras el shock exógeno, las cantidades vuelven a su nivel de equilibrio.

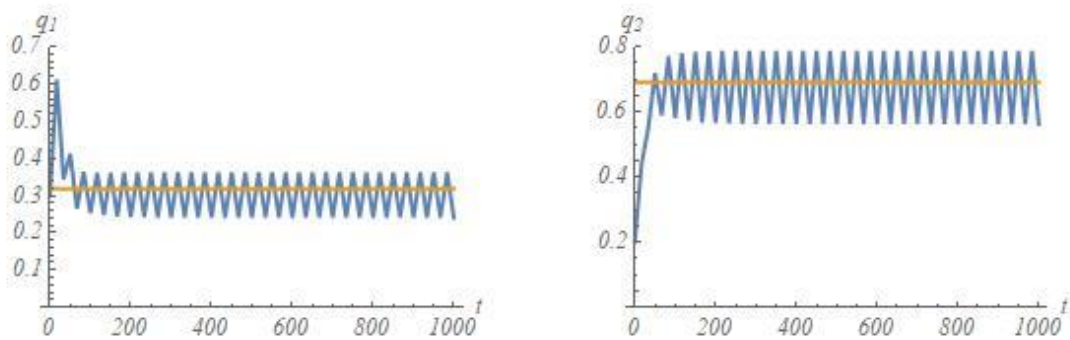


Figura 15. Trayectorias solución:  $\lambda = \frac{1}{4}$ ;  $\alpha = 1.6$ ;  $q_{1,0} = .3$ ;  $q_{2,0} = .2$ ;  $b = 1$ ;  $c1 = 0.5$ ;  $c2 = 0.3$ ;  $a = 2$

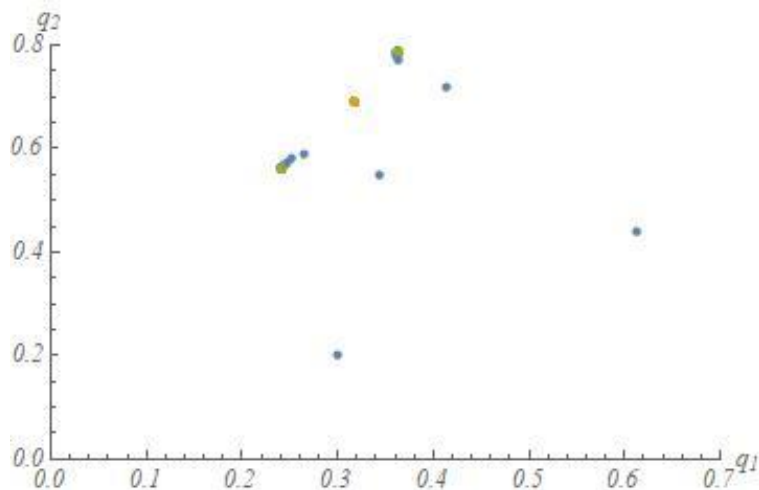


Figura 16. Plano de fases:  $\lambda = \frac{1}{4}$ ;  $\alpha = 1.6$ ;  $q_{1,0} = .3$ ;  $q_{2,0} = .2$ ;  $b = 1$ ;  $c_1 = 0.5$ ;  $c_2 = 0.3$ ;  $a = 2$

En las figuras 14 y 15 observamos un nuevo dos-ciclo, marcado por los puntos verdes en el plano de fases. Como se ha hablado antes, la predicción es complicada, pero no tanto como en las sucesivas figuras que se indican a continuación.

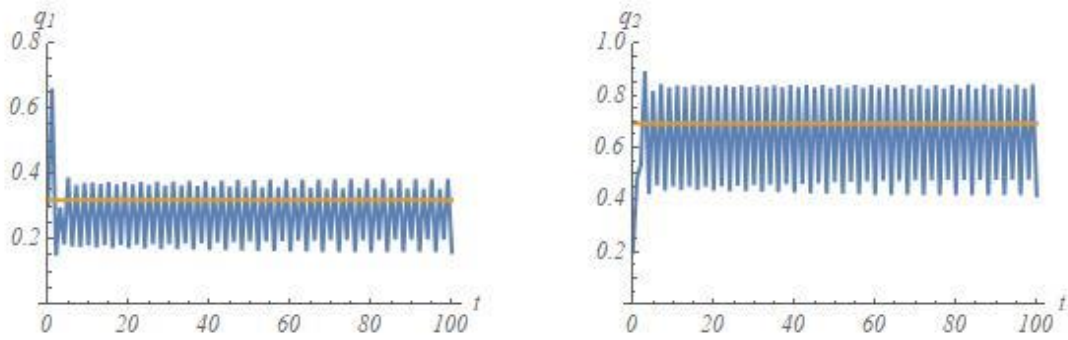


Figura 17. Trayectorias solución:  $\lambda = \frac{1}{4}$ ;  $\alpha = 1.85$ ;  $q_{1,0} = .3$ ;  $q_{2,0} = 0.2$ ;  $b = 1$ ;  $c_1 = 0.5$ ;  $c_2 = 0.3$ ;  $a = 2$

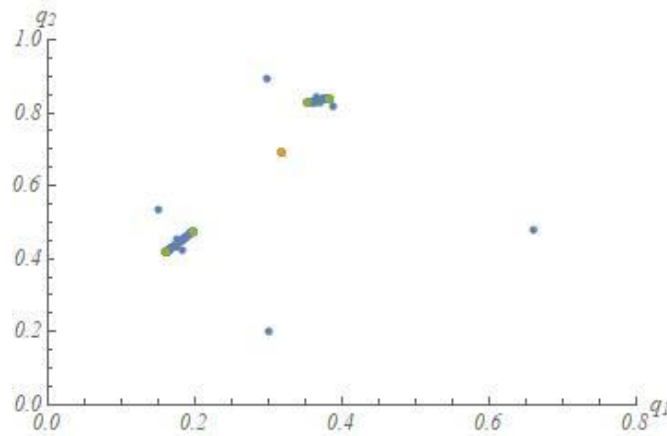


Figura 18. Plano de fases:  $\lambda = \frac{1}{4}$ ;  $\alpha = 1.85$ ;  $q_{1,0} = .3$ ;  $q_{2,0} = 0.2$ ;  $b = 1$ ;  $c_1 = 0.5$ ;  $c_2 = 0.3$ ;  $a = 2$

En este caso vemos una predicción mucho más complicada. Este tipo de casos se llaman cuatro-ciclos, como vemos en las trayectorias solución la misma se repite en cuatro puntos continuamente. Más claro se ve en el plano de fases, donde vemos que se las trayectorias reales se acumulan en torno a cuatro puntos verdes, indicando este tipo de ciclos. El equilibrio ya no es estable, pero se puede seguir prediciendo, ya que sigue una trayectoria conocida.

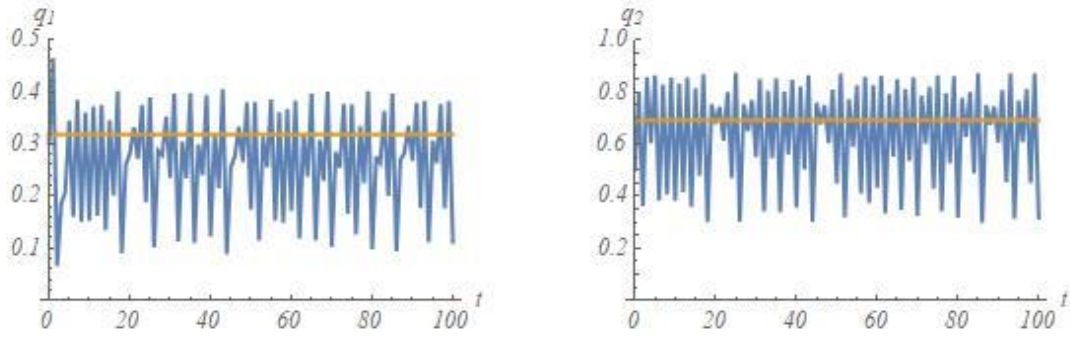


Figura 19. Trayectorias solución:  $\lambda = \frac{1}{4}$ ;  $\alpha = 2$ ;  $q_{1,0} = 0.3$ ;  $q_{2,0} = 0.5$ ;  $b = 1$ ;  $c_1 = 0.5$ ;  $c_2 = 0.3$ ;  $a = 2$

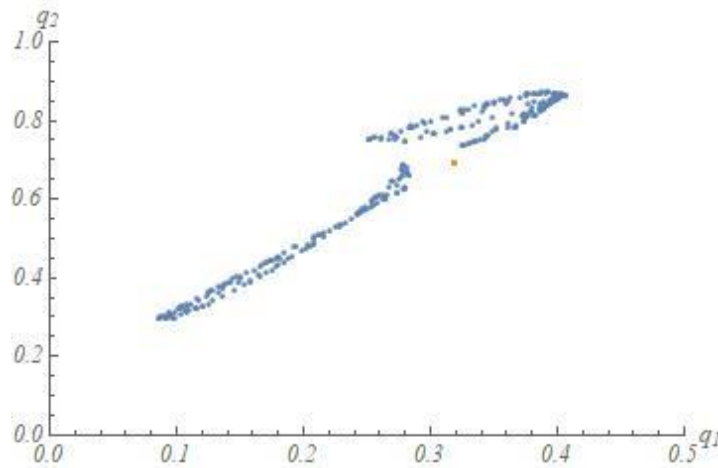


Figura 20. Plano de fases:  $\lambda = \frac{1}{4}$ ;  $\alpha = 2$ ;  $q_{1,0} = 0.3$ ;  $q_{2,0} = 0.5$ ;  $b = 1$ ;  $c_1 = 0.5$ ;  $c_2 = 0.3$ ;  $a = 2$

En estas dos últimas figuras vemos el último caso, el caso del caos. El equilibrio es totalmente inestable, por lo que tras el shock exógeno no se vuelve a él, sino que las trayectorias no siguen ningún patrón, y no se puede predecir de ninguna manera, ya que nunca sabremos en qué lugar estamos. Como vemos las trayectorias son completamente caóticas.

Al igual que en el modelo de Hotelling, estudiamos la relación entre el valor del umbral de la velocidad de ajuste y el parámetro que representa el nivel de propiedad parcial. La siguiente figura, en la que se consideran los valores de los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c_1$  y  $c_2$  utilizados en las gráficas anteriores, ilustra una relación creciente entre  $\alpha_2$  y  $\lambda$ . Por tanto, a diferencia de lo que ocurre bajo competencia en precios, bajo competencia à la Cournot la propiedad parcial ejerce un efecto estabilizador del equilibrio de Nash.

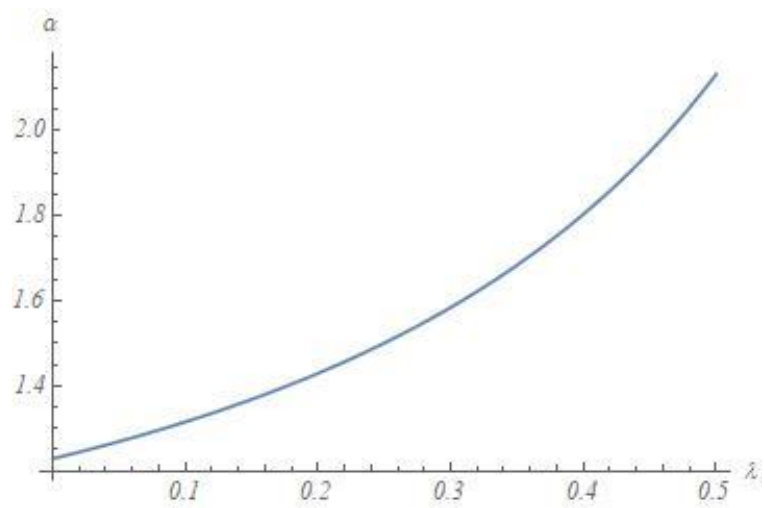


Figura 21. Umbral:  $a = 2, b = 1, c_1 = 0.5, c_2 = 0.3$

## 5. Conclusiones

A lo largo de todos estos apartados hemos usado los modelos tanto de Cournot como de Hotelling para analizar la estabilidad asintótica de los equilibrios obtenidos. Como hemos podido ver, hemos obtenido diversidad de resultados según las expectativas usadas en cada momento.

Bajo el marco el modelo de Hotelling, comenzamos analizando el esquema de expectativas naïve, también llamadas de Cournot. Vemos que, para cualquier par de precios, el equilibrio será estable, es decir, que tras un shock el retorno al equilibrio y su estabilidad estarán garantizados. Analizando ahora bajo expectativas adaptativas, vemos que ocurre lo mismo, obtenemos que, para cualquier par de precios, el equilibrio será asintóticamente estable, ya que los precios no son variables en la jacobiana, y por tanto tampoco lo son al analizar la estabilidad. Por tanto, vemos que aquí también existirá estabilidad del equilibrio, y que tras un shock exógeno las variables volverán a sus niveles de equilibrio.

Ahora, considerando las expectativas con la regla del gradiente, se garantiza la estabilidad de los precios para un rango o intervalo concreto de valores de la velocidad de ajuste, sean los que sean los puntos de partida. Fuera de este intervalo, el equilibrio será inestable, y cuanto más nos alejemos del mismo, la inestabilidad aumentará. Por ello podemos concluir que la estabilidad en precios será ratificada si y solo si las velocidades de ajuste están contenidas en el rango de valores estables.

En el esquema de expectativas de la regla del gradiente, hemos analizado cómo afecta la propiedad parcial a la estabilidad del equilibrio. Al hacerlo hemos visto que la propiedad parcial ejerce un efecto desestabilizador en el equilibrio. Al aumentar la proporción de propiedad parcial, el umbral de estabilidad de la velocidad de ajuste de las empresas disminuye.

Viéndolo ahora bajo el marco del modelo de Cournot, vemos que ocurre lo mismo con la estabilidad. Bajo el marco de las expectativas con el mismo nombre, o naïve, la estabilidad estará garantizada, al igual que en el caso de expectativas adaptativas. Por ello tras un shock, las variables volverán a sus niveles de equilibrio.

Volviendo a considerar la regla del gradiente, vemos que aquí los problemas de estabilidad son otros, al igual que en el caso de Hotelling. Ya que hemos relajado el supuesto de que se conoce plenamente la función de demanda del consumidor, obtenemos una serie de mediciones para la estabilidad. Para cualquier par de puntos, el equilibrio será estable solo si nos encontramos dentro de un intervalo de las velocidades de ajuste que nos permiten asegurar esta estabilidad. Fuera de ella, y conforme más nos alejemos, el equilibrio será inestable.

De la misma forma que en el modelo de Hotelling, hemos analizado también cómo se comporta la velocidad de ajuste de las empresas, el parámetro  $\alpha$ , cuando aumenta o disminuye la propiedad parcial. Hemos obtenido que el efecto es estabilizador. Por ello

podemos ver que, al aumentar el parámetro indicador de la propiedad parcial, el umbral que indica la estabilidad del equilibrio aumenta.

A través y gracias al programa Mathematica, hemos podido vislumbrar los comportamientos analizados de manera gráfica y más explicativa visualmente, facilitando así la explicación de los resultados.

A lo largo de este trabajo he aprendido sobre la importancia de la propiedad parcial y su extendido uso. Al profundizar en el análisis dinámico de esta manera he podido profundizar el concepto de expectativas. Las considero muy importantes porque al formalizarse por primera vez, las expectativas permitieron acercar los estudios teóricos a la realidad.

Al mismo tiempo, al introducir el concepto de estabilidad con estas características, analizándolo con las condiciones de Schur que nunca había estudiado, me ha permitido conocer y entender mejor el concepto de estabilidad o equilibrio de Nash asintóticamente estable o inestable.

Además, la búsqueda de literatura, en algunos casos descartada por no considerarla adecuada para mi trabajo, me ha permitido obtener una visión más amplia sobre la microeconomía y los estudios que se están llevando a cabo por todo el mundo.

## 6. Referencias

- 1) Andaluz, Joaquín; Jarne, Gloria (marzo 2020) Análisis dinámico en mercados oligopolistas *Departamento de Análisis Económico, Universidad de Zaragoza*.
- 2) Andaluz, Joaquín; Jarne, Gloria (2020) Expectativas
- 3) Barcena-Ruiz, Juan Carlos and Norma Olaizola. (2007) “Cost-saving production technologies and partial ownership.” *Economics Bulletin Vol 15, No 6* pp1-8
- 4) Cournot, Anthoine A. (1838) Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth
- 5) David Gilo, Yossi Moshe y Yossi Spiegel (2006) Partial cross ownership and tacit collusion. *The Rand Journal of Economics Vol 37, No 1, Spring 2006* pp81-99
- 6) Diana A. Mendes, Vivaldo M Mendes y Orlando Gomes (2008) Complex Dynamics in Simple Cournot Duopoly Games *Lisbon University Institute Working paper 10/08*
- 7) Hotelling, Harold (1929) Stability in competition
- 8) Longhua Liu, Junshan Lin y Chengzhon Qin (2018) Cross-Holdings with asymmetric information and technologies. *Economic Letters 166* pp 83-85
- 9) Luciano Fanti (2013) Cross-ownership and unions in a Cournot duopoly: When profits reduce with horizontal product differentiation. *Japan and the World Economy 27* pp 34-40
- 10) Malueg, David A (1992) Collusive behavior and partial ownership of rivals. *International Journal of Industrial Organization*. Volume 10, pp 27-34
- 11) Papadopoulos et al (2019) Product innovation transfer under passive partial ownership holdings. *Economic Letters 177* pp 22-23
- 12) Robert J. Reynolds, Bruce R. Snapp (1986) The competitive effects of partial equity interests and joint Ventures. *International Journal of Industrial Organization*. Volume 4, pp 141-153